

Paweł POTEMPA, Koło Naukowe Biomechaniki przy Katedrze Mechaniki Stosowanej,
Politechnika Śląska, Gliwice

ANALIZA DRGAŃ KOLEJKI LINOWEJ SPOWODOWANEJ ROZRUCHEM I HAMOWANIEM ORAZ ICH WPŁYW NA ORGANIZM CZŁOWIEKA^{*)}

Streszczenie. W artykule przedstawiony został fizyczny i matematyczny model dynamiki układu kolejki linowej o ruchu okrężnym. Przedstawiono opis obiektu rzeczywistego oraz wpływ drgań na organizm człowieka. Artykuł zawiera opis metody rozwiązania układu równań opisujących dynamikę rozważnego modelu drgań.

1. WSTĘP

Drgania układów fizycznych występujących w przyrodzie są zjawiskiem powszechnym. Skutki drgań mogą mieć charakter destrukcyjny, przyczyniając się do wcześniejszego zużycia urządzeń, a także mogą wpływać negatywnie na organizm ludzki. Zatem analiza drgań staje się często podstawą rozważań wielu istotnych zagadnień technicznych.

Dokładne informacje o wartościach i charakterystyce drgań obiektów można uzyskać przez pomiar ich przebiegu. Jednak proces kompleksowych pomiarów bywa często bardzo pracochłonny i drogi, zaś pomiary poszczególnych parametrów obrazują jedynie wycinek procesu. Alternatywą jest modelowanie matematyczne. Zastosowania komputera wraz z programem umożliwiającym realizowanie zagadnień matematycznych, pozwala formułować i rozwiązywać założenia modeli, co umożliwia przeprowadzenie symulacji zachowania się badanego obiektu w różnych warunkach pracy.[2,3]

2. CHARAKTERYSTYKA OBIEKTU RZECZYWISTEGO

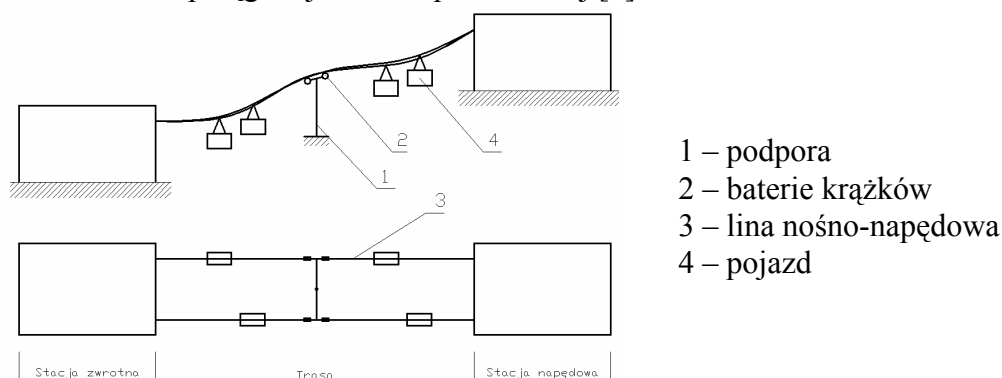
2.1. Budowa kolei linowej o ruchu okrężnym

W budowie kolei linowej o ruchu okrężnym, której schemat przedstawiono na rys. 1, wyróżnia się trzy zasadnicze podzespoły: stację napędową, trasę oraz stację zwrotną.[1]

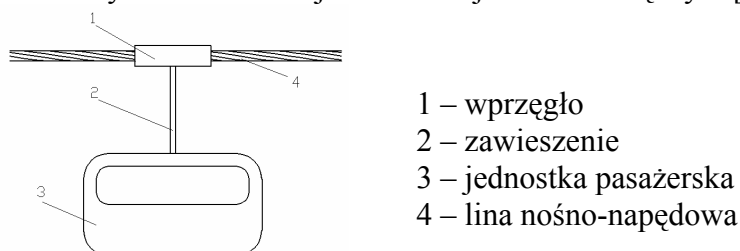
Na trasie kolei linowej występują podpory wraz z bateriami krążków prowadzącymi linę oraz lina nośno-napędowa, do której zamocowane są pojazdy (urządzenia jezdne). Urządzenie jezdne, pokazane na rys. 2, składają się z następujących części: wprzęgła, zawieszenie z

^{*)} Praca wykonana została pod kierunkiem opiekuna naukowego prof. dr hab. inż. Dagmary Tejszerskiej

głowicą do zawieszenia wprzęgła i jednostki pasażerskiej.[1]



Rys. 1. Podstawowy schemat kolei jednolinowej o ruchu okrężnym [1]



Rys. 2. Podstawowe elementy urządzenia jezdnego

Wprzęgła służą do mocowania pojazdów na linii. W kolejach jednolinowych o ruchu okrężnym znalazły zastosowanie wprzęgła stałe i wprzęgła rozłączne.

Wprzęgła stałe są urządzeniami mocującymi pojazd do liny w sposób nierozłączny w czasie eksploatacji. Wprzęgła rozłączane służą do mocowania pojazdów na poruszającej się linii. Oznacza to, że pojazdy są wyprzęgane podczas przejazdu przez stację. Siła docisku wprzęgła do liny wywołana jest przez sprężyny talerzowe, sprężyny śrubowe, drążki skretne lub przez siłę ciężkości. Istnieją także kombinacje tych systemów.

Zawieszania urządzeń jezdnych łączą jednostki pasażerskie ze wprzęgłami. Mogą być one wyposażone z elementy amortyzujące i tłumiące.

Pojazdy kolei linowych dzieli się na dwie grupy: pojazdy otwarte i pojazdy zamknięte. Do pojazdów otwartych zalicza się krzeselka, krzeselka z osłoną i gondole, natomiast pojazdy zamknięte obejmują gondole, kabiny i wagony.

2.2. Działanie kolei linowej

Lina nośno-napędowa napędzana przez układ napędowy, wprawia w ruch pojazdy kolei. W kolejach linowych o ruchu okrężnym występują dwa tory jazdy wagonów, zwane tokiem jazdy w górę i tokiem jazdy w dół. Kierunek poruszania się pojazdów nie zmienia się w czasie normalnej pracy. Ruch okrężny może odbywać się ze stałą lub zmienną prędkością (ruch pulsacyjny). W przypadku ruchu pulsacyjnego prędkość jazdy pojazdów zmienia się okresowo w zależności od położenia pojazdu na trasie, np.: pojazd porusza się wolniej w czasie przejazdu przez baterię krążków lub zatrzymuje na stacjach.

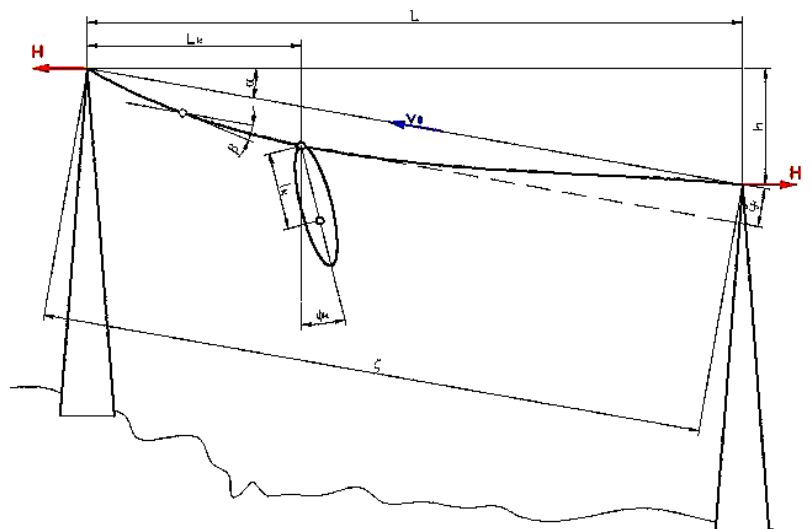
3. MODEL FIZYCZNY BADANEGO UKŁADU

Do badania drgań wykorzystano model kolejki linowej sformułowany w Zakładzie Mechaniki Ogólnej i Biomechaniki Politechniki Śląskiej. Jego podstawowe elementy to: model fizyczny, matematyczny oraz proponowany sposób rozwiązania.

Założenia do rozważnego modelu drgań kolejki linowej:

- W badanym układzie wydziela się: pojedyncze przęsło liny pomiędzy podporami, poruszające się w górę, analizowane w sposób zgrubny, a także pojedyncze obciążone krzeselko, analizowane w sposób dokładny.
- Rozważa się ruch płaski układu, w płaszczyźnie pionowej.
- Przyjmuje się, że wymuszenie rozważanych drgań stanowi jedynie zadana zmiana prędkości ruchu napędu (v_0) w czasie (t), powodująca kołysanie krzesełek.
- Rozważając zgrubnie odchylenie liny w przęsle (zwis 'z'), od linii prostej (cięciwy), łączącej rolki na sąsiednich słupach, przyjęto, że:
 - lina traktowana jest jak ukośna struna, poddana naciągowi oraz obciążeniu przez krzeselka i masę własną,
 - siły obciążające linę zastąpione są przez odpowiednie, równomiernie rozłożone obciążenie ciągłe (ρ_z), obejmujące ciężar krzesełek i samej liny (ρ_l),
 - analizując wpływ obciążenia na zwis liny uwzględniano jedynie składową prostopadłą do cięciwy przęsła, pomijając siłę równoległą do cięciwy, wywołującą rozciąganie liny, które jest związane ze znacznie mniejszymi odkształceniami,
 - pominięto wpływ poziomych składowych sił bezwładności na naciąg liny, przyjmując, że składowa pozioma naciągu ma stałą zadaną wartość (H).
- Rozważając dokładniej pojedyncze krzeselko przyjęto, że :
 - krzeselko stanowi ciało sztywne, o znanej masie (m_k), momencie bezwładności (J_k) i odległości środka ciężkości (S_k) od uchwytu na linie (l_k).
 - drgający ruch krzeselka składa się z ruchu wahadłowego wokół osi uchwytu na linie, określonego przez kąt obrotu (φ_k) oraz zmiany zwisu liny w miejscu uchwytu krzeselka, w kierunku prostopadłym do lokalnej stycznej do giętej liny, pod wpływem sił bezwładności, związanych tylko z ruchem danego krzeselka ($\Delta\xi_k$),
 - wpływ sztywności liny, zmniejszającej amplitudę ruchu wahadłowego określa zastępczy wskaźnik sztywności zgiętej liny w uchwycie, obliczany jak dla belki zginanej o długości połowy odległości między krzeselkami, podpartej ślizgowo i obrotowo na końcach, poddanej działaniu momentu ulokowanego w jej środku, o module Younga odpowiednio obniżonym w stosunku do stali (do ok. $7 \cdot 10^4$ N/mm²).
 - wpływ przenoszenia poprzez linę ruchu drgającego sąsiednich krzesełek na ruch uchwytu danego krzeselka pominięto.

Na rys. 3 przedstawiono ogólny schemat geometrii i sił rozważanego układu



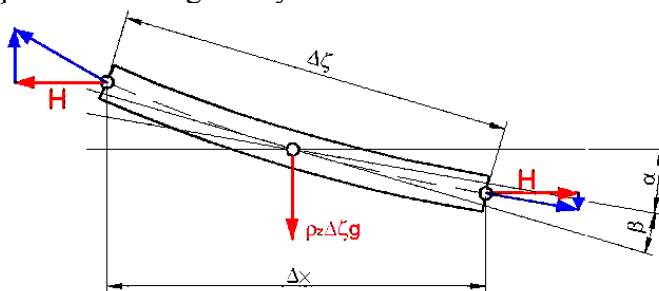
Rys. 3. Ogólny schemat geometrii i sił rozważanego układu

4. MODEL MATEMATYCZNY

Na podstawie opracowanego modelu fizycznego wyprowadzono równania opisujące dynamikę rozważanego układu.

4.1. Statyczne ugięcie liny

Statyczne ugięcie liny pod ciężarem własnym i ciężarem krzesełek wyznaczono na podstawie schematy przedstawionego na rys. 4.



Rys. 4. Schemat równowagi statycznej elementu sprężyny

Zastępczy ciężar jednostkowy liny wyraża zależność:

$$\rho_z = \rho_1 + \frac{N \cdot m_{k,śr}}{L}, \quad (1)$$

gdzie:

ρ_1 – ciężar jednostkowy liny, N – liczba krzesełek, $m_{k,śr}$ – średnia masa krzeselka z pasażerem, L – długość przesła.

Równanie równowagi statycznej elementu liny w kierunku pionowym, przy składowej poziomej naciągu liny H , niezmiennej (brak obciążeń poziomych) przyjmują postać:

$$\begin{aligned} H \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \beta) - H \cdot \operatorname{tg}\left(\alpha + \beta + \frac{d\beta}{d\zeta}\right) - \rho_z \Delta\zeta \cdot g &= 0 \\ \frac{dz}{d\zeta} &= \operatorname{tg}(\beta) \\ H \cdot \sin\left(\frac{d\beta}{d\zeta} \Delta\zeta\right) - \frac{H \cdot \sin\left(\frac{d\beta}{d\zeta} \Delta\zeta\right)}{\cos(\alpha + \beta)\cos(d\beta)} - \rho_z \Delta\zeta \cdot g &= 0 \end{aligned} \quad (2a)$$

Przyjmują, że:

$$\cos(d\beta) \approx 1, \quad \cos(\alpha + \beta) \approx \cos(\alpha), \quad d\beta = \sin(d\beta) \approx \frac{d^2 z}{d\zeta^2}$$

otrzymano:

$$\begin{aligned} \frac{H \frac{d^2 z}{d\zeta^2}}{\cos(\alpha)} + p_z g &= 0 \\ z &= -\frac{\rho_z g \cos(\alpha)}{H} \frac{\zeta^2}{2} + \beta_0 \zeta \end{aligned} \quad (2b)$$

Uwzględniając, że zwis na końcu odcinka jest zerowy $\zeta = \frac{L}{\cos(\alpha)} = 0$ oraz dla $\zeta = \frac{x}{\cos(\alpha)}$ otrzymano:

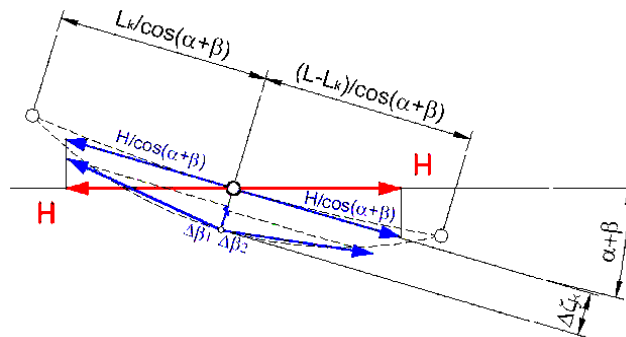
$$\beta_0 = \frac{\rho_z g L}{2H}$$

$$z = -\frac{\rho_z g \cos(\alpha)}{H} \frac{\zeta^2}{2} + \beta_0 \zeta = \frac{\rho_z g}{2H \cos(\alpha)} x(L-x) \quad (2c)$$

$$\operatorname{tg}(\beta) = \frac{dz}{d\zeta} = \frac{\rho_z g}{H} \left(\frac{L}{2} - x \right)$$

4.2. Wskaźnik sztywności

Wskaźnik sztywności linii uginającej się pod krzeselkiem wyznaczono w oparciu o schemat przedstawiony na rys. 5.



Rys. 5. Schemat do wyznaczania sztywności giętej linii

Sztywność linii uginającej się pod krzeselkiem wyznaczono przyjmując, że zmiana zwisu $\Delta\zeta_k$ powoduje zmiany kąta nachylenia linii o $\operatorname{tg}(\Delta\beta_1)$ i $\operatorname{tg}(\Delta\beta_2)$, wywołując pojawienie się dodatkowej składowej w kierunku zmiany zwisu o wartości:

$$\frac{H}{\cos(\alpha + \beta)} \operatorname{tg}(\Delta\beta_1) + \frac{H}{\cos(\alpha + \beta)} \operatorname{tg}(\Delta\beta_2)$$

Stosunek tej składowej do zmiany zwisu jest sztywnością giętej linii:

$$K_z = \frac{\frac{H}{\cos(\alpha + \beta)} [\operatorname{tg}(\Delta\beta_1) + \operatorname{tg}(\Delta\beta_2)]}{\Delta\zeta_k}$$

Przyjmując przybliżone wartości $\operatorname{tg}(\Delta\beta_1)$ i $\operatorname{tg}(\Delta\beta_2)$:

$$\operatorname{tg}(\Delta\beta_1) \approx \frac{\Delta\zeta_k}{\frac{L_k}{\cos(\alpha + \beta)}}, \quad \operatorname{tg}(\Delta\beta_2) \approx \frac{\Delta\zeta_k}{\frac{L - L_k}{\cos(\alpha + \beta)}}$$

Otrzymano:

$$K_z = \frac{H}{\cos(\alpha + \beta)} \left[\frac{\Delta\zeta_k}{\frac{L_k}{\cos(\alpha + \beta)}} + \frac{\Delta\zeta_k}{\frac{L - L_k}{\cos(\alpha + \beta)}} \right] \quad (3)$$

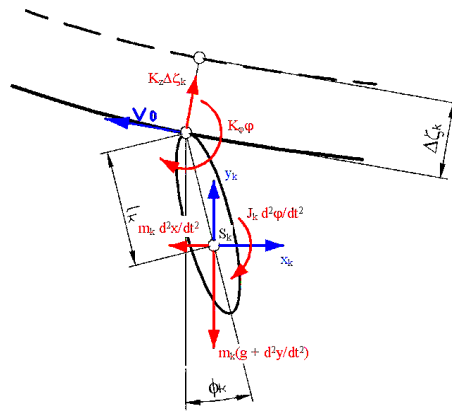
$$K_z = H \left(\frac{1}{L_k} + \frac{1}{L - L_k} \right)$$

Sztywność linii obracającej się wraz z ruchem wahadłowym krzeselka szacowano analizując kształt osi ugiętej linii jako belka o długości odpowiadającej odległości między krzeselkami $\left(\frac{L}{N} \right)$, poddanej działaniu momentu w środku długości, przy czym sztywność określono jako stosunek momentu do kąta ugięcia pod momentem:

$$K_\varphi = \frac{L}{6EI} N \cos(\alpha) \quad (4)$$

4.3. Kinematyka krzeselka

Kinematykę krzeselka opisano w oparciu o rys. 6.



Rys. 6. Schemat równowagi dynamicznej krzeselka

Ruch krzeselka określa kąt obrotu w ruchu wahadłowym (φ) ugięcie linii pod krzeselkiem ($\Delta\zeta_k$) oraz zadana prędkość unoszenia (v_0). Położenie środka ciężkości krzeselka względem statycznego położenia uchwytu linowego oraz jego prędkość i przyspieszenie wyrażają się przez zmienne podstawowe.

$$\begin{aligned} x &= -\Delta\zeta_k \sin(\alpha + \beta) + l_k \sin(\varphi) \\ y &= \Delta\zeta_k \cos(\alpha + \beta) + l_k [1 - \cos(\varphi)] \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = v_\varphi, \quad \frac{d\Delta\zeta_k}{dt} = v_\zeta \quad (5b)$$

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = v_\zeta \sin(\alpha + \beta) + v_0 \cos(\alpha) + l_k \cos(\varphi) v_\varphi \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = -v_\zeta \cos(\alpha + \beta) + v_0 \sin(\alpha) + l_k \sin(\varphi) v_\varphi \end{aligned} \quad (5c)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{dv_x}{dt} = -\frac{dv_\zeta}{dt} \sin(\alpha + \beta) + \frac{dv_0}{dt} \cos(\alpha) + l_k \cos(\varphi) \frac{dv_\varphi}{dt} - l_k \sin(\varphi) v_\varphi^2 \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{dv_y}{dt} = -\frac{dv_\zeta}{dt} \cos(\alpha + \beta) + \frac{dv_0}{dt} \sin(\alpha) + l_k \sin(\varphi) \frac{dv_\varphi}{dt} - l_k \cos(\varphi) v_\varphi^2 \end{aligned} \quad (5d)$$

4.4. Równowaga dynamiczna krzeselka

Siły oddziałujące na krzeselko obejmują ciężar, siły i momenty bezwładności oraz siły sprężystego oddziaływania liny. Rozważono równowagę sił w kierunku prostopadłym do stycznej do liny (bez siły ciężkości, równoważonej przez obliczone ugięcie statyczne liny) oraz moment względem uchwytu krzeselka:

$$\begin{aligned} K_z \Delta \zeta_k - m_k \frac{d^2 y}{dt^2} \cos(\alpha + \beta) + m_k \frac{d^2 x}{dt^2} \sin(\alpha + \beta) &= 0 \\ K_\varphi \varphi + m_k \left(g + \frac{d^2 y}{dt^2} \right) l_k \sin(\varphi) + m_k \frac{d^2 x}{dt^2} \cos(\varphi) + J_k \frac{d v_\varphi}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

5. ROZWIĄZANIE

Do obliczeń kąta obrotu krzeselka w ruchu wahadłowym (φ) oraz ugięcia liny pod krzeselkiem ($\Delta \zeta_k$) użyto metody Rungego Kuty czwartego rzędu, przyjmującą postać [4]:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (7a)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} k_1 &= \tau g(y_n, t_n) \\ k_2 &= \tau g\left(y_n + \frac{k_1}{2}, t_n + \frac{\tau}{2}\right) \\ k_3 &= \tau g\left(y_n + \frac{k_2}{2}, t_n + \frac{\tau}{2}\right) \\ k_4 &= \tau g(y_n + k_3, t_n + \tau) \end{aligned} \quad (7b)$$

W celu zastosowania metody Rungego Kuty dwa równania różniczkowe (6) uzupełniono o równania (5b). Ostatecznie po podstawieniu do równań (6) wyrażeń (5d) otrzymano cztery równania różniczkowe zwyczajne (8) o zmiennych ($\varphi, \Delta \zeta_k, v_\varphi, v_\zeta$), będące standardową postacią układu Rungego Kuty:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\varphi}{dt} \\ \frac{d\Delta \zeta_k}{dt} \\ \frac{dv_\varphi}{dt} \\ \frac{dv_\zeta}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_\varphi \\ v_\zeta \\ f_{v_\varphi}(\varphi, \Delta \zeta_k, v_\varphi, v_\zeta) \\ f_{v_\zeta}(\varphi, \Delta \zeta_k, v_\varphi, v_\zeta) \end{bmatrix} \quad (8)$$

6. WPŁYW DRGAŃ NA ORGANIZM CZŁOWIEKA

Wpływ drgań na organizm człowieka może być rozpatrywany w zależności od:

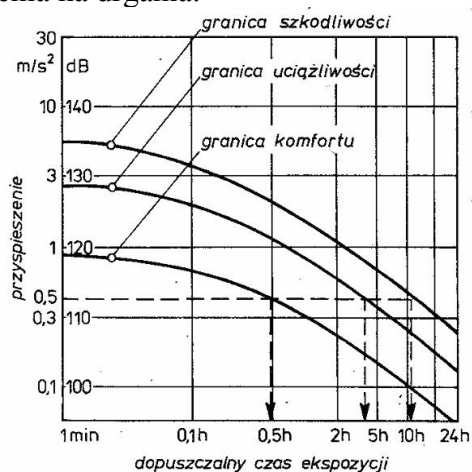
- wartości parametrów opisujących drgania (częstotliwości, amplitudy przemieszczeń, prędkości, przyspieszeń, przebiegu, czasu trwania...)
- miejsca przekazywania drgań na człowieka i pozycji odbioru
- indywidualnych cech fizjologicznych człowieka (wzrost, masa, budowa, wiek...)

Częstotliwość drgań własnych większości narządów wahają się w granicach 3 do 25 Hz. W przypadku gdy człowiek narażony jest na drgania, których częstotliwość zbliżona jest do drgań własnych poszczególnych narządów dochodzi do wystąpienia drgań rezonansowych. Drgania te wywołują duże przemieszczenia poszczególnych narządów doprowadzając do ich bólu, a nawet zerwania.[5]

Ocenę narażenia na drgania o działaniu ogólnym przeprowadzić można ze względu na wartość przyspieszeń określających:

- granicę szkodliwości,
- granicę uciążliwości
- granicę komfortu.[5]

Na rys. 7 przedstawiono podane w normie ISO wartości dopuszczalnych przyspieszeń w zależności od czasu narażenia na drgania.



Rys. 7. Wartości dopuszczalnych przyspieszeń [5]

LITERATURA

- [1]Doppelmayer A.: Warunki projektowania napowietrznych kolei jednolinowych o ruchu okrężnym. Kraków: Wyd AGH, 1997 r.
- [2]Tejszerska D.: Modelowanie i optymalizacja dynamiki wyciągów szybowych. Gliwice: Wyd. Pol. Śl., 2002 r.
- [3]Kucharski T.: Drgania mechaniczne. Rozwiązywanie zagadnień z MATHCAD-em. Warszawa: WNT, 2004 r.
- [4]Pang T.: Metody obliczeniowe w fizyce. Fizyka i Komputery. Warszawa: PWN, 2001 r.
- [5]Engiel Z.: Ochrona środowiska przed drganiami i hałasem. Warszawa: PWN, 1993 r.

ANALYSIS OF VIBRATIONS OF ROPEWAY CAUSED BY STARTING AND BRAKING AND INFLUENCE OF VIBRATION ON THE HUMAN BODY

Summary. The paper includes physical and mathematical model of dynamic system of ropeway. Described real object and influence vibration on the human body. In this article are describe method of equations system solving, which characterize dynamic of consider model.